Die mathematischen Grundlagen der Mercatorprojektion

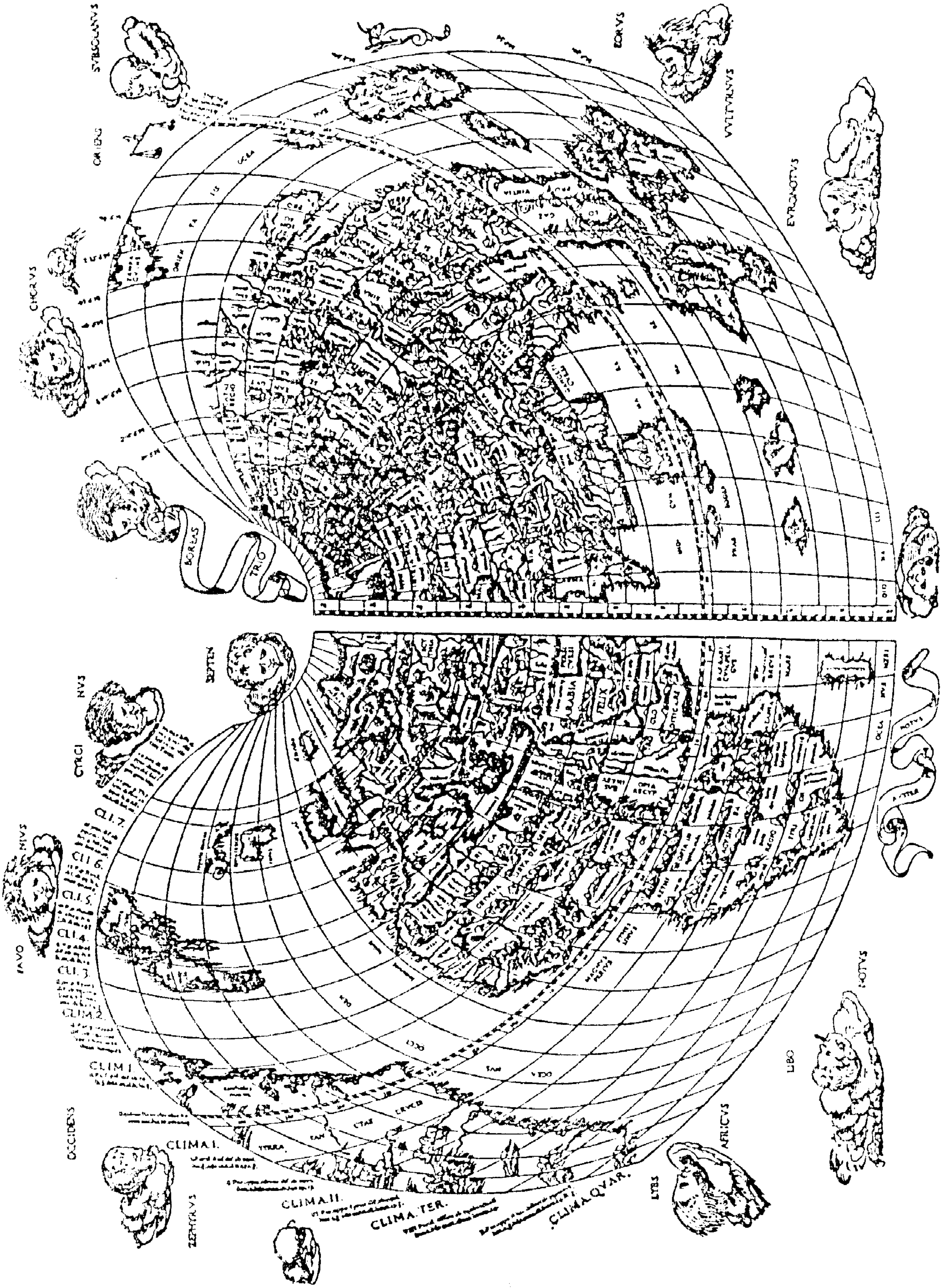
Christa Binder, TU Wien

-

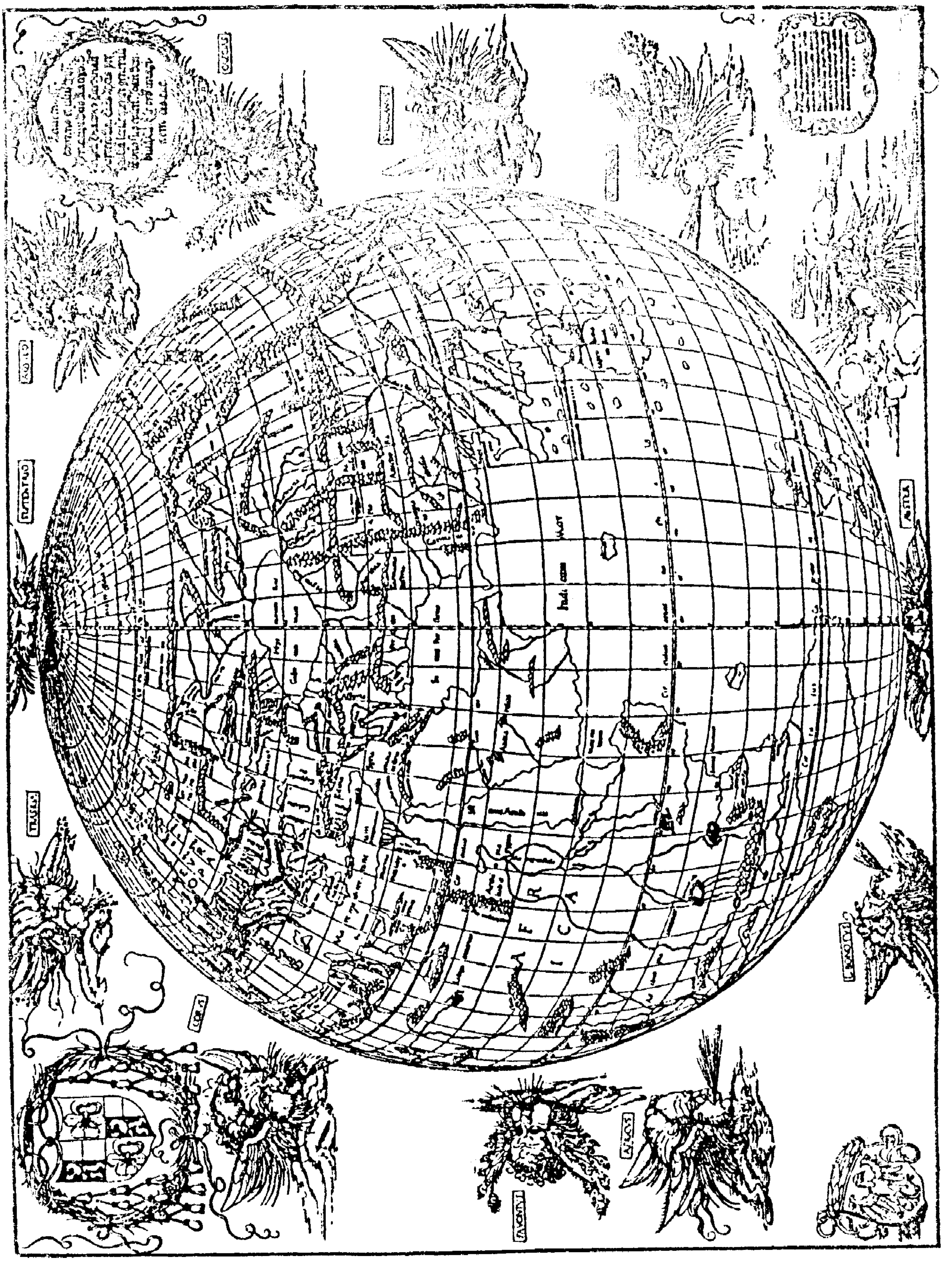
Im Vortrag wurde kurz über den Stand der Mathematik im 16. Jahrhundert berichtet, hauptsächlich auf dem Gebiet der Trigonometrie (siehe dazu Braunmühl, Cantor). Nach einem Überblick über Weltkarten und Globen bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts folgte eine Schilderung von Leben und Werk von Gerhard Mercator (1512-1594), seine Karten, Globen, und — im Mittelpunkt — die berühmte Weltkarte (1569). In diesem Artikel werden stichwortartig die wichtigsten Stationen im Leben von Mercator dargestellt, etwas ausführlicher wird die mathematische Behandlung *seiner* Projektion gebracht. Sowohl der Vortrag als auch diese Ausführung folgen eng einem von Ingrid Kretschmer und mir geschriebenen Aufsatz, *Les fondements de la projection chez Mercator*, der demnächst in einem Festband anläßlich des 400. Todesjahres von Gerhard Mercator in Löwen erscheinen wird.

Gerhard Mercator wurde am 5. 3. 1512 in Flandern geboren. Ab 1530 studierte er in Löwen bei Gemma Frisius (1508-1555), einem der führenden Mathematiker seiner Zeit, Mathematik und Landesvermessung, und in Mecheln Kartenstecherei. 1536 entstand der heute in der Österreichischen Nationalbibliothek befindliche Globus von Frisius, bei dem Mercator mitgearbeitet hat. Die erste große eigenständige Arbeit von Mercator war eine Palästinakarte, 1537, danach 1538 seine erste Weltkarte (siehe Abbildung). 1541 entstand ein Globus (Durchmesser 41,5 cm), auf dem Loxodrome eingezeichnet sind. 1552 übersiedelte Mercator nach Duisburg, 1554 stach er eine Europakarte, die seinen Weltruhm festigte. 1564 fertigte er im Auftrag des Herzogs von Lothringen eine Karte der britischen Inseln an, und 1569 erschien die *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium*. Bis zu seinem Tod am 2. 12. 1594 war er mit der Erstellung eines Atlasses beschäftigt, der 1595 erschien.

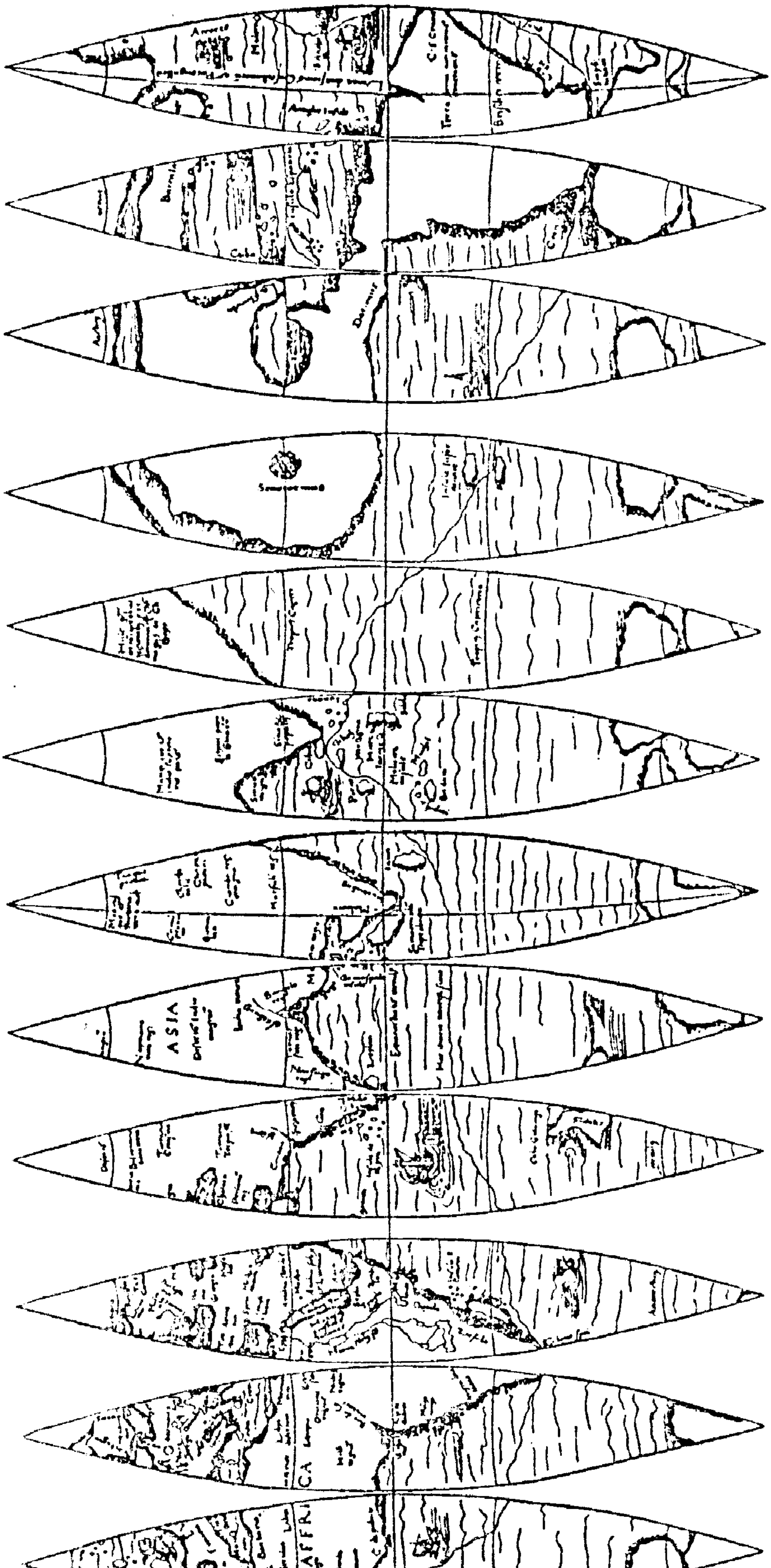
Auf der Weltkarte von 1569 tritt zum ersten Mal die Mercatorprojektion auf. Sie ist winkeltreu und bildet daher die Kursgleichen (die Loxodromen) als Gerade ab, eine Eigenschaft die für die Schiffahrt unentbehrlich war. Das wesentlich neue Prinzip war dabei, daß die Breitengrade nach den Polen zu in demselben Verhältnis vergrößert wurden, wie die Parallelkreise in ihrem Verhältnis zum Äquator zunehmen. Das Problem, wie Mercator seine *vergrößerten Breiten* konstruiert hat (man nimmt heute als fast sicher an, daß er die Konstruktion empirisch durchgeführt hat), bzw. wie man sie berechnen könnte, hat die Mathematiker der folgenden Jahre stark beschäftigt. Thomas Harriot (1560-1621) hat eine Erklärung versucht,



Weltkarte von Bernardus Sylvanus, Venedig 1511



Weltkarte in Globusform von Johann Stabius, entworfen von Albrecht Dürer, 1515



Globuskarte von Johannes Schöner, Nürnberg. 1523 die aber weder bekannt, noch publiziert wurde. Erst Edward Wright (1561-1615) fand in seinem Werk "On certain errors in Navigation ..." (1599) den Zusammenhang mit der Sekansfunktion, und damit die Grundlage zur genauen Konstruktion. Wir geben hier seinen Gedankengang in moderner Schreibweise kurz wieder:

Bei der Projektion werden die Meridiane als parallele Linie, senkrecht zum Äquator dargestellt, d.h. jeder Breitengradbogen wird gestreckt und hat dann die gleiche Länge wie der entsprechende Äquatorbogen. Den Streckungfaktor berechnen wir durch:

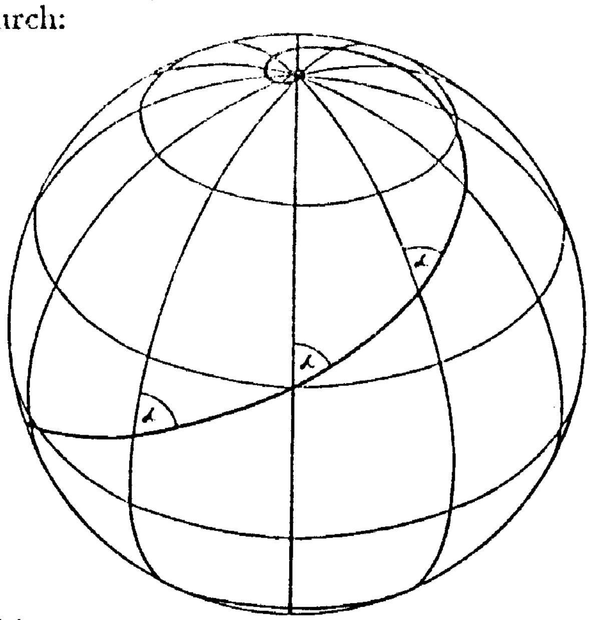


Abb. Loxodrome

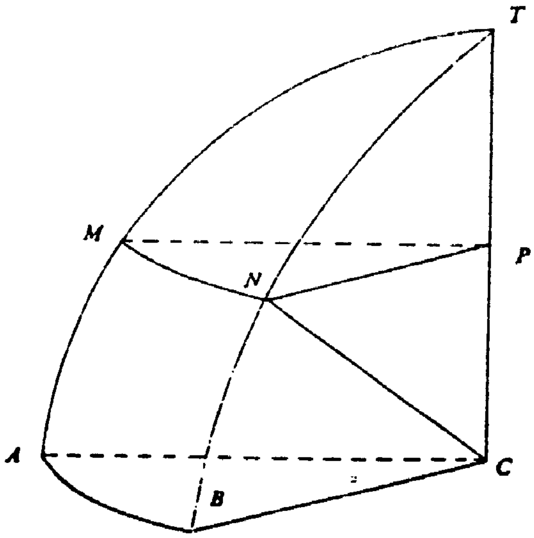


Abb. Sekans

$\triangle ABC$ und $\triangle MNP$ sind ähnliche *Dreiecke* (eigentlich keine Dreiecke, denn AB (ein Teil des Äquators), bzw. MN (der entsprechende Breitenkreisbogen) sind Kreisbögen), denn die Winkel bei C, bzw. P sind gleich, und in beiden Dreiecken gilt $AC = BC$, bzw. $NP = MP$. Daher müssen alle entsprechenden Seiten (oder Bögen) in gleichem Verhältnis stehen, also gilt

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{NP}{NC},$$

denn $BC = NC$, der Radius der Kugel. Der Winkel bei N ist als Gegenwinkel gleich dem Winkel bei C. $\triangle NPC$ ist ein rechtwinkeliges Dreieck, also gilt

$$\frac{NP}{NC} = \cos\phi.$$

Die echte Länge des Bogens MN ist daher $AB\cos\phi$. In der Projektion soll gelten: $M'N' = AB$, also $MN = M'N'\cos\phi$, oder

$$M'N' = MN\frac{1}{\cos\phi} = MN\sec\phi.$$

Der Streckungfaktor des Breitenkreisbogens ist also sec ϕ, d.h er ist vom Breitengrad abhängig.

Als nächsten Schritt zeigen wir, daß, wenn die Längenkreise mit dem gleichen Faktor gestreckt werden, eine winkeltreue Abbildung vorliegt. Das ist genau die Eigenschaft, die wir brauchen — die Loxodrome soll ja alle Meridiane unter gleichem Winkel schneiden. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt auf der Kugel, seinen Längen- und Breitengrad, sowie die zum Winkel α gehörige Loxodrome durch ihn. Lokal, d.h. in einer *kleinen* Umgebung des Punktes sieht dies so aus:

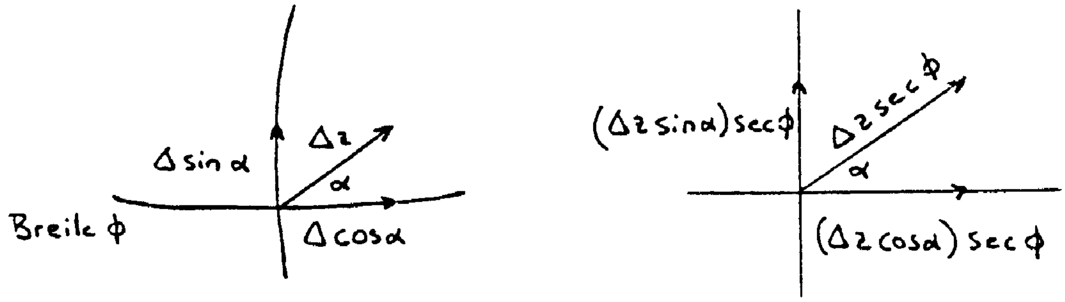


Abb. Winkel

In der Abbildung haben wir rechts dieselbe Situation in der Projektion. Das Stück $\Delta z \cos \alpha$ wird um den Faktor sec ϕ gestreckt — wenn der Winkel erhalten bleiben soll, muß daher auch das Stück $\Delta z \sin \alpha$ um diesen Faktor gestreckt werden.

Jetzt fehlt noch die Berechnung der Länge eines Meridianbogens. Wir hatten schon erwähnt, daß der Streckungsfaktor vom Breitenkreis abhängt. Stellen wir uns einen Bogen entlang einem Meridian zwischen dem Äquator und dem Breitenkreis zu den Winkel ϕ vor. Beim Ausgangspunkt ist die Länge ungeändert, doch schon ein kleines Stückchen weiter, zum Beispiel 1^0 weiter, wird mit dem Faktor sec 1^0 gestreckt, wieder ein Grad weiter mit dem Faktor sec 2^0, usw. Angenähert können wir die Länge berechnen, wenn wir annehmen, daß entlang so kleinen Teilen die Streckung konstant bleibt, und wir diese kleinen Strecken aufsummieren. Je feiner diese Einteilung wird, umso besser ist die Annäherung an die richtige Länge des Bogens. Kurz gesagt (mit unseren Mitteln der Differential- und Integralrechnung — für Wright wesentlich schwieriger), die Breitenkreise müssen zum Äquator den Abstand

$$D(\phi) = \int_0^{\phi} \sec x dx$$

haben. Wright hat daraufhin Tabellen für diese Funktion berechnet; mit dem Abstand 1'.

Nun fehlt noch der Schritt, dieses Integral allgemein zu berechnen. Dies gelang erst Henry Bond (1600-1617), der 1645 starke Ähnlichkeiten zwischen Wrights Tafeln, und den 1640 von John Napier veröffentlichten Logarithmentafeln für die Tangensfunktion entdeckte. Er vermutete, daß gilt

$$D(\phi) = \ln|\tan(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4})|.$$

Diese vieldiskutierte Vermutung wurde dann 1668 von James Gregory bewiesen.

Bevor wir dies beweisen, stellen wir das Integral noch in anderer Form dar, und zwar (wir lassen manchmal die Integrationsgrenzenweg):

$$\int_0^\phi \sec x dx = \ln(\sec\phi + \tan\phi).$$

Dieses Integral läßt sich leichter berechnen durch

$$\int_0^\phi \sec x dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{cos x dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} =$$

Bis jetzt haben wir nur elementare Umformungen durchgeführt, jetzt kommt eine einfache Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1}{2(1-\sin x)} + \frac{1}{2(1+\sin x)}$$

also

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x dx}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-\sin x) + \ln(1+\sin x)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + C = \ln\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

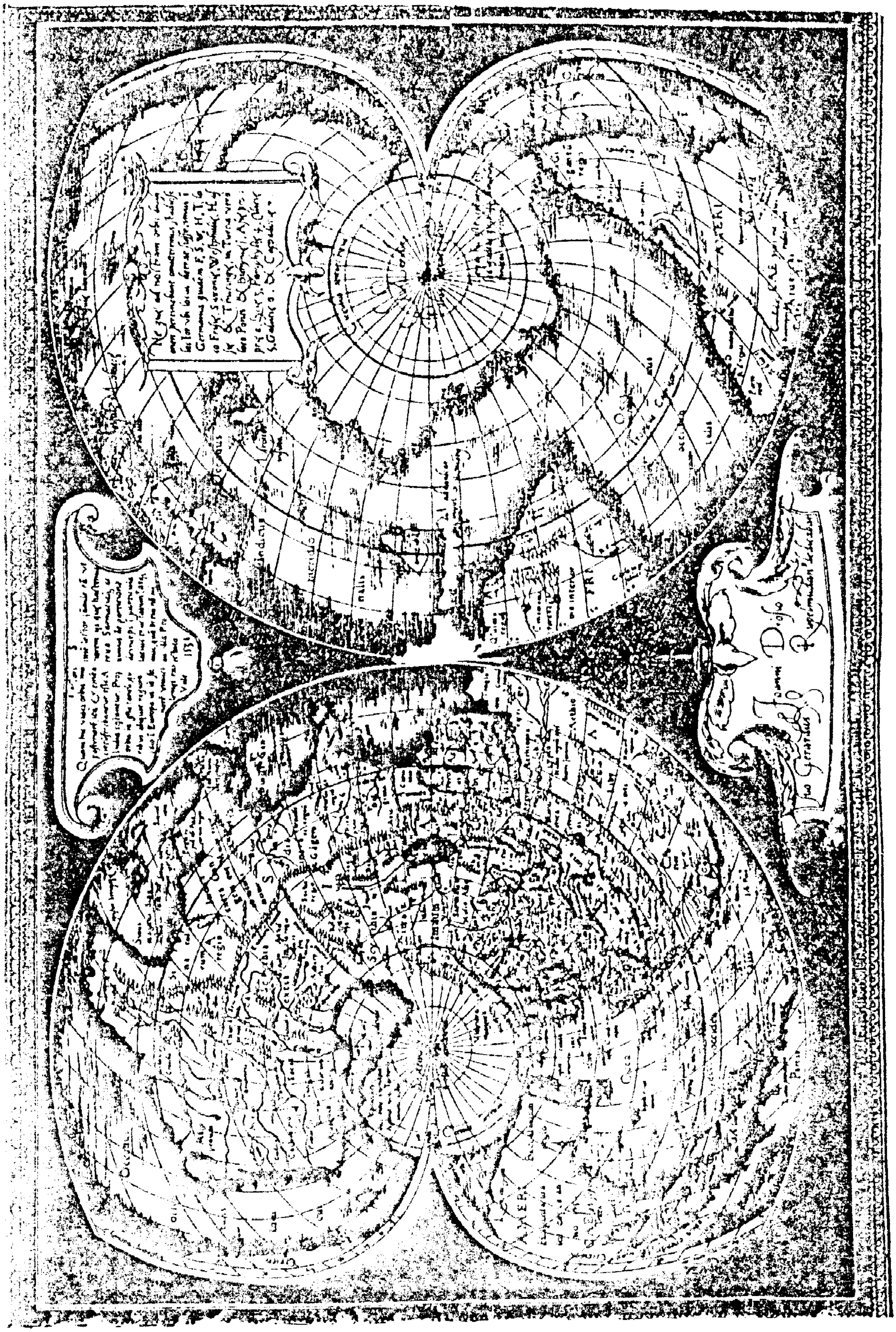
wie behauptet.

Um die Form von Gregory zu erhalten, können wir entweder diese Darstellung umformen, oder das Integral direkt berechnen. Dies ist etwas trickreicher, und benützt die trigonometrischen Beziehungen

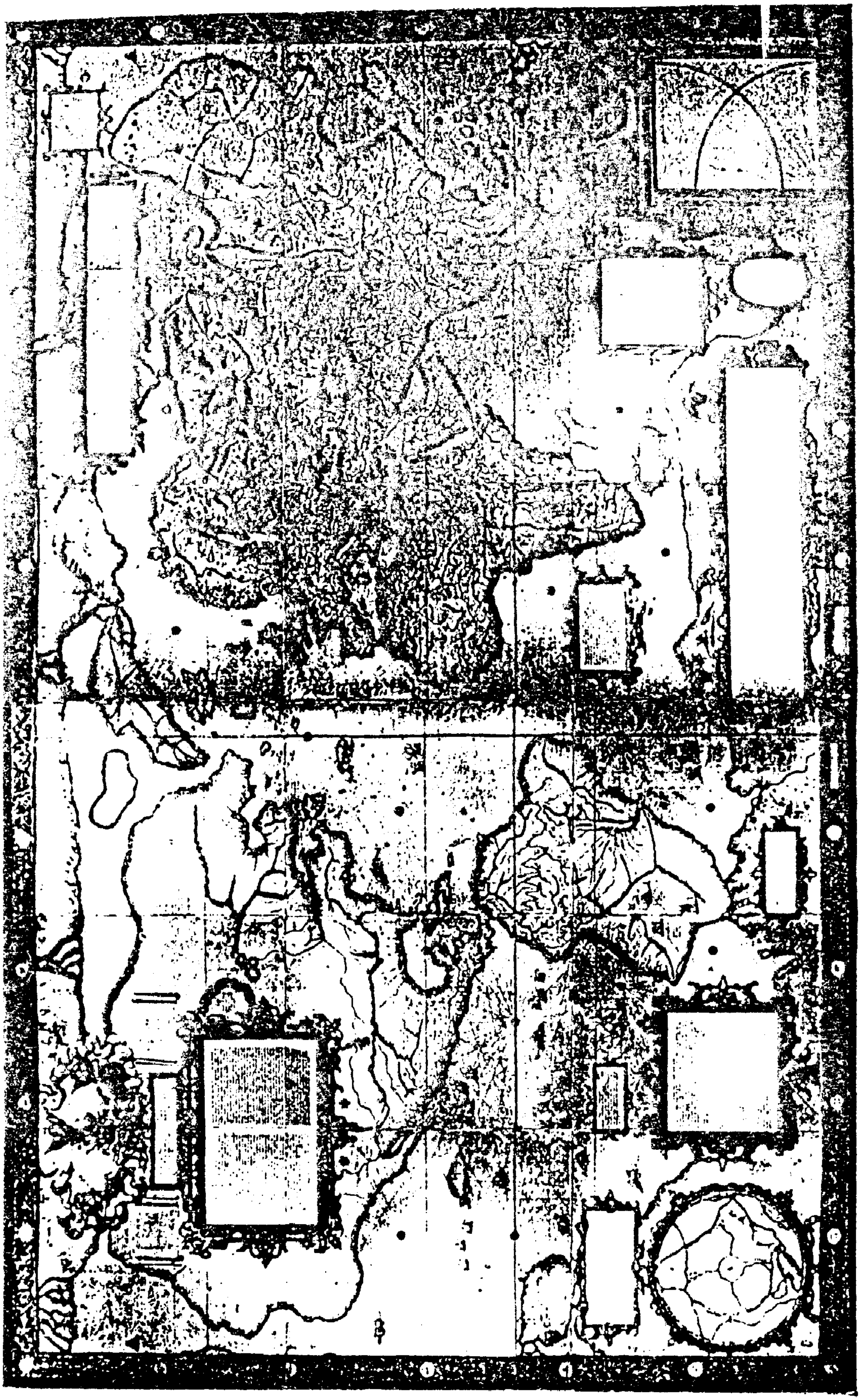
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{und}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right).$$

Diese Rechnung führen wir hier nicht mehr durch.



Gerhard Mercator, Weltkarte in Doppelherzprojektion, Löwen, 1538



Weltkarte von G. Mercator, 1569

Literatur:

E. Bernlethner: *Die Erdgloben von Gemma Frisius und Gerhard Mercator — ein Vergleich*, Der Globusfreund, **11** (1962) 113–121.

R. Bourgeois - Ph. Furtwängler: *Kartographie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften und ihrer Grenzgebiete, VI,1,4, 1909.

A. von Braunmühl: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Erster Teil: Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen*, Teubner Leipzig, 1900 (insbesonder Kap. 7, S.118–156).

A. Breusing: *Gerhard Kremer, genannt Mercator, der deutsche Geograph*, Duisburg 1878.

M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2. Band: Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668*, Teubner, 1899 (Nachdruck 1965) (insbesondere Kap. 13, S. 369-542).

J. Dörflinger: *Der Gemma Frisius-Erdglobus von 1536 in der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien*, Der Globusfreund, **21–23** (1973) 81–99.

Duisburger Forschungen, Schriftenreihe für Geschichte und Heimatkunde Duisburgs, herausgegeben vom Stadtarchiv Duisburgs in Verbindung mit der Mercator-Gesellschaft, Verlag für Wirtschaft und Kultur, Duisburg Ruhrort, 1962, Band 6 (W. Renckhoff)

M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.

K.E. Krämer: *Mercator — eine Biographie*, Mercator-Verlag, Duisburg 1980.

H.L. Resnikoff - R.O. Wells: *Mathematik im Wandel der Kulturen*, Vieweg 1983.

V.F. Rickey - P.M. Tuchinsky: *An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant*, Mathematics Magazine **53** (1980) 162–166.

H. Wagner: *Gerhard Mercator und die ersten Loxodromen auf Karten*, Annalen der Hydrographie, **43** (1915) S.299–311, 343–352.

H. Wagner: *Kartometrische Analyse der Weltkarte G. Mercators vom Jahre 1569*, Annalen der Hydrographie, **43** (1915) 377–394.

H. Wagner: *Die loxodromische Kurve bei G. Mercator*, Nachrichten v.d. k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, phil.hist. Kl., 1917, S. 254–267.